

Version complète

Sur l'existence du schéma en groupes fondamental

MARCO ANTEI, MICHEL EMSALEM, AND CARLO GASBARRI

RÉSUMÉ. Soient S un schéma de Dedekind, X un S -schéma de type fini et $x \in X(S)$ une section. On démontre l'existence du schéma en groupes fondamental de X en x qui classe tous les toreseurs finis au dessus de X , pointés au dessus de x quand X est à fibres réduites ou quand X est normal. On démontre aussi l'existence d'un schéma en groupes, qu'on appellera schéma en groupes fondamental quasi-fini de X en x , qui classe tous les toreseurs quasi-finis au dessus de X , pointés au dessus de x . On introduit les toreseurs galoisiens, qui jouent dans ce contexte un peu le rôle des revêtements galoisiens connexes dans le théorie du groupe fondamental étale ; on en étudie quelques propriétés.

ABSTRACT. Let S be Dedekind scheme, X a S -scheme of finite type and $x \in X(S)$ a section. We prove the existence of the fundamental group scheme of X at x which classifies all the finite torsors over X , pointed over x when X has reduced fibers or when X is normal. We also prove the existence of a group scheme, that we will call the quasi-finite fundamental group scheme of X at x , which classifies all the quasi-finite torsors over X , pointed over x . We define Galois torsors, which play in this context a role similar to the one of connected Galois covers in the theory of étale fundamental group ; we study their properties.

Mots clés : toreseurs, schéma en groupes fondamental, schéma en groupes.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary : 14G99 14L20 14L30. Secondary : 11G99.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
1.1. Objectifs et plan du travail	1
Remerciements	3
2. Le contre-exemple de Jilong Tong	3
3. Préliminaires	3
3.1. Notations	3
3.2. Torseurs et sections	4
4. Le cas réduit	6
5. Le cas normal	7
5.1. Le cas fini	8
5.2. Le cas quasi-fini	9
6. Le schéma en groupes fondamental	12
7. Torseurs galoisiens	15
Références	18

1. INTRODUCTION

1.1. Objectifs et plan du travail. Soit (X, x_0) un schéma pointé. Le groupe fondamental $\pi_1^{et}(X, x_0)$ de X classe les revêtements étales finis de X , plus précisément il classe les toreseurs sur X sous des schémas en groupes finis étales : les revêtements galoisiens étales sont

Date: 16 juin 2015.

Marco Antei remercie le projet TOFIGROU (ANR-13-PDOC-0015-01).

Michel Emsalem a reçu le soutien du Labex CEMPI (ANR-11-LABX-01).

Carlo Gasbarri a reçu le soutien de FRIAS/USIAS.

en bijection avec les quotients finis de $\pi_1^{et}(X, x_0)$. Comme déjà mentionné dans SGA1, dans plusieurs situations naturelles, on voudrait avoir à sa disposition un schéma en groupes qui classe les toseurs sur X sous des schémas en groupes finis et plats (et non seulement étales) sur une base fixée S . On ne sait pas si un tel schéma en groupes existe toujours. Quand on sait prouver son existence, on l'appellera le *schéma en groupes fondamental* de X sur S et on le notera $\pi_1(X, x_0)$.

Pour construire le schéma en groupes fondamental de X sur S , on est confronté au problème suivant : on considère la catégorie $\mathcal{P}(X)$ des triples (Y, G, y_0) où G est un schéma en groupes fini et plat sur S , Y est un G -torseur sur X et y_0 est un S -point de Y qui domine x_0 . Si cette catégorie est cofiltrée, alors le schéma en groupes fondamental de X sur S existe (et il est la limite projective des schémas en groupes G qui interviennent dans la définition de la catégorie). Le fait que cette catégorie soit cofiltrée n'est pas toujours facile à vérifier.

L'existence du schéma en groupes fondamental pour des schémas réduits et connexes sur un corps a été établie dans l'article fondateur [13]. L'étape suivante est d'étudier le cas où la base S est un schéma de Dedekind. Dans l'article [6], le troisième auteur prétend avoir prouvé que la catégorie $\mathcal{P}(X)$ est cofiltrée quand X est un schéma réduit et fidèlement plat sur S . Malheureusement dans cette preuve il y a une faute : le Lemme 2.2 de op. cit. est faux, comme le montre le contre-exemple du paragraphe 2. Donc la construction du schéma en groupes fondamental sous ces hypothèses sur X s'avère être encore un problème ouvert.

Soit S un schéma de Dedekind et $f : X \rightarrow S$ un S -schéma muni d'une section $x_0 \in X(S)$. Dans cet article on démontre l'existence du schéma en groupes fondamental $\pi_1(X, x_0)$ quand au moins une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

(A) $X \rightarrow S$ est fidèlement plat, localement de type fini et pour tout point $s \in S$, X_s est réduit ;

(B) $X \rightarrow S$ est fidèlement plat, localement de type fini et pour tout point $x \in X \setminus X_\eta$, l'anneau local \mathcal{O}_x est intégralement clos ;

En particulier le schéma en groupes fondamental de X sur S existe si X est régulier ou normal. Ceci est souvent suffisant pour les applications. La stratégie de la preuve suit celle de [6] : on prouve que la catégorie $\mathcal{P}(X)$ est cofiltrée.

On généralise ensuite cette étude à la question de l'existence du groupe fondamental schématique qui classe les toseurs sous des schémas en groupes *quasi-finis* sur S . On montre qu'il existe pour des schémas qui vérifient la propriété suivante :

(C) X est intègre et normal, $X \rightarrow S$ est localement de type fini et pour tout point $s \in S$, X_s est intègre et normal.

Le plan de ce travail est le suivant : Dans le premier paragraphe, on décrit le contre-exemple, dû à Jilong Tong, au Lemme 2.2 de [6]. Après des préliminaires techniques, dans la section 4, on démontre les propositions clefs nécessaires pour prouver que la catégorie $\mathcal{P}(X)$ est cofiltrée sous l'hypothèse (A) et dans la section 5, on se place sous l'hypothèse (B), dans le cas fini, et (C) dans le cas quasi-fini. Les trois cas sont un peu différents, et nécessitent donc des preuves différentes, même si les énoncés se ressemblent beaucoup. Dans la section 6, on utilise ces énoncés pour démontrer que les catégories de toseurs considérés sont cofiltrées, et on en déduit l'existence dans les cas considérés du schéma en groupes fondamental, dont on étudiera quelques propriétés, en particulier le comportement par réduction à la fibre générique. Dans la section 7 on introduit les toseurs galoisiens : ce sont des toseurs sous des groupes G pour lesquels le morphisme correspondant $\pi_1^{qf}(X, x_0) \rightarrow G$ est fidèlement plat. On démontre que tout toseur est *précédé* par un toseur galoisien.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier Jilong Tong, qui nous a autorisé à présenter ici son contre-exemple, décrit à la section 2 et Hélène Esnault pour son intérêt pour notre travail au travers de nombreux échanges.

2. LE CONTRE-EXEMPLE DE JILONG TONG

Le contre-exemple suivant au Lemme 2.2 de [6] montre l'importance des hypothèses du Théorème 6.2. Observons aussi que ce contre-exemple montre aussi la difficulté de prouver l'existence du schéma en groupes fondamental sous des hypothèses très générales.

On rappelle l'énoncé du Lemme 2.2 de [6] :

Soit S un schéma de Dedekind de point générique $\eta = \text{Spec}(K)$ et G un schéma en groupes fini et plat sur S . Soit $H \hookrightarrow G$ un sous schéma en groupes. Soit $X \rightarrow S$ un S -schéma fidèlement plat réduit et irréductible. Soit $P \rightarrow X$ un G -torseur et $Y \subset P_\eta$ un sous-schéma fermé qui est un H_η -torseur. Alors la clôture de Zariski \bar{Y} de Y dans P est un H -torseur.

Pour prouver que le schéma en groupes fondamental d'un S -schéma X existe, il suffit qu'un énoncé comme celui-ci soit valable pour X . Dans cet article on montrera qu'il est valable quand X est à fibres réduites ou normal et on en déduira donc l'existence du schéma en groupes fondamental.

Soient ζ une racine primitive p -ième de 1 (p est un nombre premier), $X = \text{Spec } \mathbb{Z}[p\zeta] = \text{Spec } \mathbb{Z}[V]/(V^p - p^p)$. Soit $P \rightarrow X$ le μ_p -torseur trivial $P := X \times \mu_p = \text{Spec } \mathbb{Z}[T, V]/(T^p - 1, V^p - p^p)$. On considère la flèche diagonale $X_{\mathbb{Q}} \rightarrow (X \times \mu_p)_{\mathbb{Q}} = (\mu_p \times \mu_p)_{\mathbb{Q}}$. C'est un morphisme de toseurs pour le morphisme de schémas en groupes $1 \rightarrow \mu_p$. Pour déterminer la fermeture schématique de l'image, on cherche le noyau du morphisme φ :

$$\mathbb{Z}[T, V]/(T^p - 1, V^p - p^p) \longrightarrow \mathbb{Q}[T, V']/(T^p - 1, V'^p - 1) \longrightarrow \mathbb{Q}[W]/(W^p - 1)$$

$$T \longrightarrow T \longrightarrow W$$

$$V \longrightarrow pV' \quad V' \longrightarrow W$$

Clairement $pT - V \in \ker \varphi$.

Par ailleurs $\mathbb{Z}[T, V]/(T^p - 1, V^p - p^p, pT - V) \simeq \mathbb{Z}[T]/(T^p - 1, p^p T^p - p^p) = \mathbb{Z}[T]/(T^p - 1, p^p(T^p - 1)) = \mathbb{Z}[T]/(T^p - 1)$ est un anneau plat sur \mathbb{Z} . C'est donc la clôture schématique cherchée. Et si l'on pose $\bar{Y} = \text{Spec } \mathbb{Z}[T]/(T^p - 1)$ le morphisme $\bar{Y} \rightarrow X$ correspond à

$$\mathbb{Z}[V]/(V^p - p^p) \longrightarrow \mathbb{Z}[T]/(T^p - 1)$$

$$V \longrightarrow pT$$

qui en tout premier $l \neq p$, est l'identité $\mu_p \rightarrow \mu_p$, mais en p est le morphisme $\alpha_p \rightarrow \mu_p$ qui transite par $\alpha_p \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_p \rightarrow \mu_p$. Donc $\bar{Y} \rightarrow X$ n'est pas plat, en particulier ce n'est pas un toseur.

3. PRÉLIMINAIRES

3.1. Notations. Dans cet article S désignera un schéma de Dedekind, i.e. un schéma localement noethérien, irréductible et normal de dimension 0 ou 1. On notera par $\eta = \text{Spec}(K)$ son point générique. Partout dans le texte un morphisme de schémas sera dit quasi-fini s'il est de type fini

et si chaque fibre est un ensemble fini de points. On se donne un S -schéma $X \rightarrow S$ fidèlement plat. Par l'expression *torseur fini* (resp. *quasi-fini*) sur X , on entendra un toseur sur X au sens *fpqc* sous l'action d'un S -schéma en groupes fini et plat (resp. quasi-fini, affine et plat).

3.2. Torseurs et sections. On utilisera tout le long de ce travail l'énoncé suivant qui assure la représentativité du quotient d'un schéma sous l'action d'un schéma en groupes, sous certaines hypothèses, énoncé pour lequel nous référons à [5], Exposé V, Théorème 7.1 et [15], Théorème 1, (iv), pour le cas fini et [15], Théorème 1, (v) et [2], Théorème 7, Appendice 1, pour le cas quasi-fini. La compatibilité du quotient (par l'action d'un schéma en groupes de type fini) et du changement de base est assurée par [5, Exposé IV, 3.4.3.1].

Théorème 3.1. *Soit T un schéma localement noethérien, Z un T -schéma localement de type fini, H un T -schéma en groupes plat agissant sur Z de telle sorte que le morphisme naturel $Z \times_T H \rightarrow Z \times_T Z$ soit une immersion fermée. Alors si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée*

- (1) $H \rightarrow T$ est fini et $Z \rightarrow T$ est quasi-projectif,
- (2) $H \rightarrow T$ est quasi-fini et $Z \rightarrow T$ est quasi-fini,

le faisceau $(Z/H)_{\text{fpqc}}$ est représenté par un schéma Z/H . De plus le morphisme canonique $Z \rightarrow Z/H$ est fidèlement plat et le morphisme canonique $Z \times_T H \rightarrow Z \times_{Z/H} Z$ est un isomorphisme.

La conclusion est donc que $Z \rightarrow Z/H$ est un H -torseur.

Définition 3.2. Soit $G \rightarrow S$ un schéma en groupes affine fidèlement plat, $H \hookrightarrow G$ un sous- S -schéma en groupes fermé, $Y \rightarrow X$ un G -torseur. On dira qu'un H -torseur $T \rightarrow X$ est contenu dans le G -torseur $Y \rightarrow X$, s'il existe un X -morphisme $T \rightarrow Y$ qui est une immersion fermée $H \hookrightarrow G$ -équivariante.

Lemme 3.3. (1) *Il existe une correspondance bijective, qui à tout H -torseur $T \rightarrow X$ contenu dans le G -torseur $Y \rightarrow X$, où G, H désignent des S -schémas en groupes quasi-finis et plats, associe l'unique section $s : X \rightarrow Y/H$ du morphisme canonique $Y/H \rightarrow X$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{s} & Y/H \end{array}$$

soit commutatif. Cette section est une immersion fermée et le diagramme précédent est cartésien.

- (2) *La correspondance qui au H -torseur $T \rightarrow X$ fait correspondre la section $s : X \rightarrow Y/H$ commute aux changements de base. Plus précisément, soit $X' \rightarrow X$ un S -morphisme, $Y' = Y \times_X X'$; si deux sections s et s' rendent commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} Y'/H & \longrightarrow & Y/H \\ \uparrow s' & & \uparrow s \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

ce diagramme est cartésien et le H -torseur $T' \rightarrow X$ contenu dans le G -torseur $Y' \rightarrow X$ correspondant à la section s' est le tiré par $X' \rightarrow X$ du H -torseur $T \rightarrow X$ contenu dans le G -torseur $Y \rightarrow X$ correspondant à s .

Démonstration. (1) A toute section $s : X \rightarrow Y/H$, on associe le tiré par s du H -torseur $Y \rightarrow Y/H$. Dans l'autre sens, du diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & Y \\ \downarrow & \swarrow & \\ X & & \end{array}$$

où t est une immersion fermée H -équivariante, on déduit clairement un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ T/H = X & \xrightarrow{s} & Y/H \end{array}$$

qui est clairement cartésien (un morphisme de H -torseurs est automatiquement un H -isomorphisme). D'où l'unicité de s . Le fait que s est une immersion fermée peut se déduire par exemple du fait qu'il en est de même de $T \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow Y/H$ est fidèlement plat (ou du fait général qu'une section d'un morphisme séparé est toujours une immersion fermée). Il est clair que ces constructions sont inverses l'une de l'autre.

- (2) Vérifions que le diagramme de (2) est cartésien. Le passage au quotient commutant au changement de base, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y'/H & \longrightarrow & Y/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cartésien. La conclusion suit du fait suivant de nature catégorique : si

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & Z \\ b' \downarrow & & \downarrow b \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cartésien, et si s' et s sont des sections de b' et b respectivement rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & Z \\ s' \uparrow & & \uparrow s \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

celui-ci est aussi cartésien. C'est une conséquence du fait bien connu suivant : dans un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

les deux carrés sont cartésiens si et seulement si le grand rectangle et le carré de droite sont cartésiens.

Enfin le tiré par $Y'/H \rightarrow Y/H$ du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{s} & Y/H \end{array}$$

est le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{s'} & Y'/H \end{array}$$

ce qui prouve que le tiré par $X' \rightarrow X$ du torseur $T \rightarrow X$ correspondant à la section s est le torseur T' correspondant à la section s' .

□

4. LE CAS RÉDUIT

Soient S un schéma de Dedekind, X un schéma et $X \rightarrow S$ un morphisme fidèlement plat. On suppose ici que X_s est un schéma réduit pour tout point $s \in S$.

Lemme 4.1. *Soient R un anneau de valuation discrète, $S = \text{Spec}(R)$ de points générique et spécial $\eta = \text{Spec}(K)$ et $s = \text{Spec}(k)$ (respectivement), X un schéma réduit, fidèlement plat et localement de type fini sur S , de fibre spéciale X_s réduite. Soient encore G un R -schéma en groupes fini et plat, $P \rightarrow X$ un G -torseur, H un sous-schéma en groupes de G_η et $Y \rightarrow X_\eta$ un H -torseur contenu dans $P_\eta \rightarrow X_\eta$. Soient \bar{Y} et \bar{H} (respectivement) les adhérences schématiques de Y dans P et H dans G , alors $\bar{Y} \rightarrow X$ est un \bar{H} -torseur contenu dans $P \rightarrow X$.*

Démonstration. D'après [9] (2.8.3) il existe une action $\bar{Y} \times_S \bar{H} \rightarrow \bar{Y}$ compatible avec l'action de G sur P . Donc en particulier le morphisme canonique

$$u : \bar{Y} \times_S \bar{H} \rightarrow \bar{Y} \times_X \bar{Y}$$

complète le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} \times_S \bar{H} & \xrightarrow{u} & \bar{Y} \times_X \bar{Y} \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ P \times_S G & \xrightarrow{v} & P \times_X P \end{array}$$

où v est un isomorphisme, i et j sont deux immersions fermées. Il s'ensuit que u est une immersion fermée aussi ([1], Lemma 28.3.1 (3)).

D'après le Théorème 3.1, le quotient est représenté par un schéma \bar{Y}/\bar{H} tel que $p : \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}/\bar{H}$ soit fidèlement plat, et le morphisme $\bar{Y} \rightarrow X$ se factorise par un morphisme $\lambda : \bar{Y}/\bar{H} \rightarrow X$ dont on va étudier les propriétés :

λ est séparé : l'isomorphisme $\bar{Y} \times_S \bar{H} \simeq \bar{Y} \times_{\bar{Y}/\bar{H}} \bar{Y}$ et le fait que $p : \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}/\bar{H}$ est fidèlement plat, assurent que $p : \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}/\bar{H}$ est un \bar{H} -torseur, en particulier p est propre. Ensuite il suffit de considérer le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} & \xrightarrow{\Delta_2} & \bar{Y} \times_X \bar{Y} \\ p \downarrow & & \downarrow p \times p \\ \bar{Y}/\bar{H} & \xrightarrow{\Delta} & \bar{Y}/\bar{H} \times_X \bar{Y}/\bar{H} \end{array}$$

où Δ_2 est une immersion fermée car $\overline{Y} \rightarrow X$ est propre. Ce diagramme entraîne

$$\Delta_1(\overline{Y}/\overline{H}) = \Delta_1(p(\overline{Y})) = (p \times p)(\Delta_2(\overline{Y}))$$

qui est fermé dans $\overline{Y}/\overline{H} \times_X \overline{Y}/\overline{H}$ puisque $(p \times p)\Delta_2$ est propre. Donc λ est séparé ([11], II, Corollary 4.2)

λ est propre : λ est séparé, p est surjectif, $\lambda \circ p$ est propre comme composé du morphisme $P \rightarrow X$ et de l'immersion fermée $\overline{Y} \hookrightarrow P$, tous deux propres; donc λ est propre ([12], Ch 3, Prop 3.16 (f)) .

λ est quasi-fini : il est propre, donc de type fini et en plus on observe que pour tout $x \in X$ $\lambda^{-1}(x)$ est fini.

λ est fini (donc affine) : un morphisme propre et quasi-fini est en particulier fini ([10] Théorème 8.11.1).

λ est surjectif : l'image de λ dans X contient l'image de $\lambda \circ p$ qui est dense dans X ; par ailleurs, la propriété de λ assure que $\lambda(\overline{Y}/\overline{H})$ est fermé dans X . On en déduit l'égalité $\lambda(\overline{Y}/\overline{H}) = X$.

λ est un isomorphisme : $\lambda_s : (\overline{Y}/\overline{H})_s \rightarrow X_s$ est surjectif, mais X_s est réduit donc $\lambda_s^\# : \mathcal{O}_{X_s} \hookrightarrow (f_s)_*(\mathcal{O}_{\overline{Y}/\overline{H}})$ est injectif ([8], Corollaire 1.2.7); supposons X et $\overline{Y}/\overline{H}$ affines : d'après [16], Lemma 1.3, le morphisme λ , qui est affine, et est un isomorphisme sur la fibre générique, est un isomorphisme. Dans le cas général, le fait que λ est affine permet de se ramener au cas affine.

□

Proposition 4.2. *Soit X un schéma, fidèlement plat sur S , tel que pour tout point $s \in S$, X_s est réduit (en particulier X est réduit, cf. [8], Proposition 9.5.9). Soient encore G un S -schéma en groupes fini et plat, $P \rightarrow X$ un G -torseur, H un sous-schéma fermé en groupes de G_η et $Y \rightarrow X_\eta$ un H -torseur contenu dans $P_\eta \rightarrow X_\eta$. Soient \overline{Y} et \overline{H} les clôtures schématiques de Y dans P et H dans G , alors $\overline{Y} \rightarrow X$ est un \overline{H} -torseur contenu dans $P \rightarrow X$.*

Démonstration. Pour tout point $s \in S$ on considère l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{S,s}$ et le morphisme $u_s : \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \rightarrow S$; c'est bien sûr un S -morphisme de schémas qui est génériquement un isomorphisme. On dénote par $X_{(s)}$ le schéma donné par le produit fibré $X \times_S \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ (notations similaires pour G , P , \overline{Y} et \overline{H}); la fibre spéciale de $X_{(s)}$ coïncide avec X_s qu'on a supposée réduite. Donc l'énoncé est vrai si on tire tous les objets sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$, c'est à dire, $\overline{Y}_{(s)} \rightarrow X_{(s)}$ est un $\overline{H}_{(s)}$ -torseur contenu dans $P_{(s)} \rightarrow X_{(s)}$, d'après le Lemme 4.1. Cela entraîne que le morphisme $\overline{Y} \rightarrow X$ est plat et donc fidèlement plat. Par ailleurs \overline{Y} est muni naturellement d'une X -action de \overline{H} compatible avec l'action de G sur P , induisant un morphisme naturel $\overline{Y} \times_S \overline{H} \rightarrow \overline{Y} \times_X \overline{Y}$, qui est un isomorphisme localement en tout $s \in S$, et donc un isomorphisme. En conclusion $\overline{Y} \rightarrow X$ est un \overline{H} -torseur.

□

5. LE CAS NORMAL

Soit X un schéma connexe fidèlement plat sur S . Dans cette section, inspirée par [13] Chapter II, on établira des énoncés similaires à la Proposition 4.2 sous des hypothèses différentes. Si jusqu'à présent X était un schéma à fibres spéciales réduites, on remplace ici cette hypothèse par la normalité de X , et l'on établit successivement un énoncé dans le cas des schémas en groupes finis, puis dans celui des schémas en groupes quasi-finis. Sous cette hypothèse de normalité,

on considérera la situation plus générale d'un torseur contenu dans la restriction du torseur donné à un ouvert dense U de X (et non seulement le cas où $U = X_\eta$), ce qui entraînera des conséquences intéressantes quand on étudiera les propriétés du schéma en groupes fondamental (voir §6). On démontre d'abord un lemme général dont l'importance s'éclairera à la section §6.

Lemme 5.1. *Soient $f : X \rightarrow S$, $f' : X' \rightarrow S$ deux morphismes fidèlement plats et localement de type fini. Soit $g : X' \rightarrow X$ un S -morphisme tel que $\mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_{X'}$ est un isomorphisme. Soit $j : Y \rightarrow X$ un G -torseur sous un S -schéma en groupes $G \rightarrow S$ affine, plat et quasi-fini. On suppose qu'il existe un sous-schéma en groupes fermé et plat $H \rightarrow S$ de G et un H -torseur $Z' \rightarrow X'$ contenu dans le G -torseur tiré sur X' par g du G -torseur $Y \rightarrow X$ donné. Alors le G -torseur $j : Y \rightarrow X$ lui-même contient un H -torseur $Z \rightarrow X$.*

Démonstration. La compatibilité du quotient et du changement de base entraîne que les carrés sont cartésiens dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_{X'} & \xrightarrow{\quad} & Y & & \\
 \downarrow j_{X'} & \searrow j'_{X'} & \downarrow & \searrow j' & \\
 & & Y_{X'}/H & \xrightarrow{u} & Y/H \\
 & \swarrow j''_{X'} & \downarrow & \swarrow j'' & \\
 X' & \xrightarrow{g} & X & &
 \end{array}$$

L'existence d'un torseur $Z' \hookrightarrow Y_{X'}$ contenu dans $Y_{X'}$ entraîne l'existence d'une section de $j''_{X'}$, qu'on note $s : X' \rightarrow Y_{X'}/H$ et qui, composée avec u donne un morphisme $t = u \circ s : X' \rightarrow Y/H$. Ce dernier induit un morphisme de \mathcal{O}_X -faisceaux $j''_*(\mathcal{O}_{Y/H}) \rightarrow g_*(\mathcal{O}_{X'}) \simeq \mathcal{O}_X$. Du fait que j'' est affine on obtient une section $t' : X \rightarrow Y/H$ ([1], Lemma 28.13.5) telle que $t' \circ g = t$; de plus t' est une immersion fermée ([1], Proposition 40.6.1). Le H -torseur $Z \rightarrow X$ est le tiré sur X du H -torseur $Y \rightarrow Y/H$ par t' . \square

5.1. Le cas fini.

Proposition 5.2. *Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat et localement de type fini, où X est intègre. Soit $j : Y \rightarrow X$ un G -torseur sous un S -schéma en groupes $G \rightarrow S$ fini et plat. Soit $U \subset X$ un ouvert dense dans X , $S' = f(U) \subset S$. Soit $H \rightarrow S'$ un sous-schéma en groupes fini et plat de $G_{S'}$ et $T \rightarrow U$ un H -torseur contenu dans le $G_{S'}$ -torseur $Y_U \rightarrow X_U$. On note $\bar{H}_\eta \rightarrow S$ la fermeture schématique de H_η dans G .*

On suppose que pour tout point $x \in X \setminus U$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos. Alors il existe un \bar{H}_η -torseur $\bar{T} \rightarrow X$ contenu dans le G -torseur $Y \rightarrow X$ (par rapport au morphisme $\bar{H}_\eta \rightarrow G$), tel que le diagramme suivant soit cartésien :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y_U & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 T & \xrightarrow{\quad} & \bar{T} & & \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & U & \xrightarrow{\quad} & X
 \end{array}$$

Démonstration. On remarque d'abord que par l'unicité de la clôture schématique, du fait que $H \rightarrow S'$ est plat, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \bar{H}_\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

est cartésien. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

entraîne que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_U & \longrightarrow & (\bar{H}_\eta)_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cartésien (avec des notations évidentes) ; il y a une action de $(\bar{H}_\eta)_X$ sur Y compatible avec l'action de G_X et qui tirée sur U donne l'action de H_U sur Y_U . La compatibilité du quotient et du changement de base entraîne que les carrés sont cartésiens dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Y_U & \xrightarrow{\quad} & Y & & \\ & \searrow j'_U & & \searrow j' & \\ & & Y_U/H & \xrightarrow{u} & Y/\bar{H}_\eta \\ & \swarrow j''_U & & \swarrow j'' & \\ U & \xrightarrow{i} & X & & \end{array}$$

L'existence d'un toreur $T \hookrightarrow Y_U$ contenu dans Y_U entraîne l'existence d'une section de $j''_U : s : U \rightarrow Y_U/H$ qui est une immersion fermée. Composée avec l'immersion ouverte u elle donne une immersion $t = u \circ s : U \rightarrow Y/\bar{H}_\eta$. Le fait que Y est localement noethérien et que $Y \rightarrow Y/\bar{H}_\eta$ est fidèlement plat entraîne que Y/\bar{H}_η est localement noethérien. L'immersion t à valeurs dans un schéma localement noethérien est quasi-compacte ([1], Lemma 27.5.3). Il s'ensuit que t est la composée de l'immersion ouverte $U \rightarrow \overline{t(U)}$ et de l'immersion fermée $\overline{t(U)} \hookrightarrow Y/\bar{H}_\eta$ ([1], Lemma 28.3.2). Le morphisme composé de j'' avec cette immersion fermée $\overline{t(U)} \hookrightarrow Y/\bar{H}_\eta$ est un morphisme fini $w : \overline{t(U)} \rightarrow X$ dont la restriction à l'ouvert dense U est l'identité. L'hypothèse de normalité des anneaux locaux en les points de $X \setminus U$ implique alors que w est un isomorphisme. On en déduit donc une section $s'' : X \rightarrow Y/\bar{H}_\eta$ de j'' . D'où la conclusion du lemme, où le \bar{H}_η -torseur $\bar{T} \rightarrow X$ est le tiré par $s'' : X \rightarrow Y/\bar{H}_\eta$ du \bar{H}_η -torseur $Y \rightarrow Y/\bar{H}_\eta$. \square

5.2. Le cas quasi-fini.

Proposition 5.3. *Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat et localement de type fini, où X est intègre et normal. On suppose que pour tout point $z \in S$, la fibre X_z est intègre et normale. Soit $j : Y \rightarrow X$ un G -torseur sous un S -schéma en groupes $G \rightarrow S$ quasi-fini et plat. Soit $U \subset X$ un ouvert non vide de X , $S' = f(U) \subset S$. Soit $H \rightarrow S'$ un sous-schéma en groupes quasi-fini et plat de $G_{S'}$ et $T \rightarrow U$ un H -torseur contenu dans le $G_{S'}$ -torseur $Y_U \rightarrow X_U$. On note $\bar{H}_\eta \rightarrow S$ la fermeture schématique de H_η dans G . On suppose qu'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- (1) $S = S'$;
- (2) la composée $T_\eta \rightarrow Y_\eta \rightarrow Y$ n'est pas une immersion fermée.

Alors il existe un \bar{H}_η -torseur $\bar{T} \rightarrow X$ contenu dans le G -torseur $Y \rightarrow X$ (par rapport au morphisme $\bar{H}_\eta \rightarrow G$), tel que le diagramme suivant soit cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 & Y_U & \longrightarrow Y \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 T & \longrightarrow & \bar{T} \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & U & \longrightarrow X
 \end{array} \quad (5.1)$$

Démonstration. On a déjà rappelé que les quotients par des schémas en groupes quasi-finis et plats existent ([2, Appendice I, Théorème 7]) ; on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 Y_U/H & \xrightarrow{u} & Y/\bar{H}_\eta \\
 \downarrow j''_U & \nearrow s & \downarrow j'' \\
 & X' & \\
 \uparrow a & \searrow w & \\
 U & \xrightarrow{i} & X
 \end{array} \quad (5.2)$$

où u, a, i sont immersions ouvertes, s, b sont des immersions fermées, $t := u \circ s$ et $X' := \overline{t(U)}$ l'image schématique (muni de la structure de schéma réduit). Le schéma X' est réduit et irréductible, donc intègre. On remarque que w est une immersion ouverte : en effet w est affine et quasi-fini, qui se factorise donc par X'' , schéma intègre, où $X' \rightarrow X''$ est une immersion ouverte et $X'' \rightarrow X$ est un morphisme fini ([14, page 42]). On a déjà remarqué que puisque X est normal ce dernier morphisme est en fait un isomorphisme.

On considère d'abord le cas $S = S'$, d'où $H = \bar{H}_\eta$. Sur tout point $z \in S$ on tire le diagramme 5.2 et l'on obtient

$$\begin{array}{ccc}
 (Y_U/H)_z & \xrightarrow{u_z} & (Y/\bar{H}_\eta)_z \\
 \downarrow j''_{U_z} & \nearrow s_z & \downarrow j''_z \\
 & \overline{a_z(U_z)} \hookrightarrow X'_z & \\
 \uparrow a_z & \searrow w_z & \\
 U_z & \xrightarrow{i_z} & X_z
 \end{array} \quad (5.3)$$

Le fait que X_z soit intègre, et donc en particulier irréductible, assure que U_z qui est non vide est dense. On construit $\overline{a_z(U_z)}$ image schématique de U_z dans X'_z , qui coïncide avec $\overline{t_z(U_z)}$, image schématique de U_z dans $(Y/\bar{H}_\eta)_z$: en effet X'_z , sous-schéma fermé de $(Y/\bar{H}_\eta)_z$, contenant $t_z(U_z)$, contient donc l'image schématique $\overline{t_z(U_z)}$. On s'est donc ramené au cas d'un corps, qu'on connaît : le morphisme c est un isomorphisme et par conséquent w_z est surjectif. Il s'ensuit que w est une immersion ouverte surjective et donc un isomorphisme (ce n'est pas nécessaire mais cela entraîne aussi que $\overline{a_z(U_z)} = X'_z$). Ça prouve que $b \circ w^{-1}$ est une section, ce qui est suffisant pour conclure.

Pour s'assurer que le diagramme 5.1 est cartésien, on invoque le Lemme 3.3.

On suppose maintenant que la composée $T_\eta \rightarrow Y_\eta \rightarrow Y$ n'est pas une immersion fermée et on procède par étapes :

CAS 1 : soit $S = \text{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète R , $S' = \{\eta\}$, $U = X_\eta$, $T = T_\eta$ et $H = H_\eta$. On observe d'abord que $f(X') = S$. En effet le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccccc} T & \longrightarrow & Y_\eta & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T/H = X_\eta & \xrightarrow{s} & Y_\eta/H & \xrightarrow{u} & Y/\bar{H} \end{array}$$

et le morphisme $T \rightarrow Y_\eta \rightarrow Y$ est une immersion fermée si et seulement si le morphisme $X_\eta \rightarrow Y_\eta/H \rightarrow Y/\bar{H}$ l'est aussi. Par définition ce dernier se factorise en $X_\eta \rightarrow X' \rightarrow Y/\bar{H}$. Puisque on a supposé que $T \rightarrow Y_\eta \rightarrow Y$ n'est pas une immersion fermée, alors $X_\eta \rightarrow X'$ n'est pas une immersion fermée (parce que $X' \rightarrow Y/\bar{H}_\eta$ est une immersion fermée par définition). Et donc $X_\eta \neq X'$ et X' se surjecte sur S .

En particulier, pour tout $z \in S$, $X'_z \neq \emptyset$. On est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} (Y/\bar{H})_{X'} & \longrightarrow & Y/\bar{H} \\ \downarrow & \nearrow b & \downarrow j'' \\ X' & & X \\ & \searrow w & \\ & & X \end{array} \quad (5.4)$$

d'où l'existence d'une section b' de la première flèche verticale.

Or, $(Y/\bar{H})_{X'} \simeq Y_{X'}/\bar{H}$ ([5, Exposé IV, 3.4.3.1]) où $Y_{X'} \rightarrow X'$ est un G -torseur. La section b' nous fournit un \bar{H} -torseur $\tilde{T} \rightarrow X'$ (tiré par b' du \bar{H} -torseur $Y_{X'} \rightarrow Y_{X'}/\bar{H}$) contenu dans $Y_{X'} \rightarrow X'$. On s'est donc ramené au point (1) du lemme, qu'on a démontré et qui nous permet de conclure.

Pour s'assurer du caractère cartésien du diagramme 5.1, on considère le diagramme suivant qui résume la situation

$$\begin{array}{ccccc} Y_U/H & \xrightarrow{u_1} & (Y/\bar{H}_\eta)_{X'} & \xrightarrow{u_2} & Y/\bar{H}_\eta \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{i} & X' & \xrightarrow{w} & X \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & S & \xrightarrow{=} & S \end{array}$$

où les carrés supérieurs sont cartésiens, i, w, u_1, u_2 sont des immersions ouvertes ($u = u_2 u_1$). On dispose d'une section $s : U \rightarrow Y_U/H$ de la première flèche verticale de gauche, et $b' : X' \rightarrow (Y/\bar{H}_\eta)_{X'}$ de la seconde flèche verticale, vérifiant $b = u_2 b'$. L'égalité $bi = us$ donne $u_2 b' i = u_2 u_1 s$, et le fait que u_2 soit une immersion ouverte, donc un monomorphisme, implique que $b' i = u_1 s$, c'est à dire la commutativité du carré avec les sections s et b' . On conclut par le Lemme 3.3.

CAS 2 : $S' = \eta$, $U = X_\eta$ et S à nouveau quelconque.

C'est une conséquence de la Proposition 4.2 (où il faudra remplacer partout “fini” par “quasi-fini”).

CAS 3 : $S' = \eta$, $U \subset X_\eta$ et S à nouveau quelconque. On est sur un corps et d'après [13] on se ramène au Cas 2.

CAS 4 : $S' \neq \eta$ et $S' \neq S$. On tire T sur U_η : d'après le Cas 3 on sait étendre $T_\eta = T_{U_\eta}$ en un sous-torseur \tilde{T} de $Y \rightarrow X$. Ceci termine la preuve de la Proposition. \square

Remarque 5.4. Voici un exemple, qui explique pourquoi, dans la Proposition 5.3, on a introduit l'hypothèse que $T_\eta \hookrightarrow Y_\eta \hookrightarrow Y$ n'est pas une immersion fermée. En général l'adhérence schématique du torseur T n'est pas forcément un torseur sous l'adhérence schématique de H : on prend $X = S = \text{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète de caractéristique positive p , d'uniformisante π , $G = \text{Spec } R[X]/(\pi^{p-1}X^p - X)$, H réduit à l'élément neutre de G_η et $T = \{x = 1/\pi\}$. Le sous-schéma fermé T de G_η est fermé dans G (pas de spécialisation en dehors de lui-même). Et T n'est pas un torseur sous \bar{H} qui est réduit à l'élément neutre de G .

Voici une version pointée de la Proposition 5.3.

Proposition 5.5. *Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat et localement de type fini, où X est intègre et normal. On suppose que pour tout point $z \in S$, la fibre X_z est intègre et normale. On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Soit $j : Y \rightarrow X$ un G -torseur sous un S -schéma en groupes $G \rightarrow S$ quasi-fini et plat, muni d'un point $y \in Y_x(S)$. Soit $U \subset X$ un ouvert non vide de X , $S' = f(U) \subset S$. Soit $H \rightarrow S'$ un sous-schéma en groupes quasi-fini et plat de $G_{S'}$ et $T \rightarrow U$ un H -torseur contenu dans le $G_{S'}$ -torseur $Y_U \rightarrow X_U$. On note η le point générique de S et K le corps des fonctions de S . On suppose que $y_{S'} \in T_U(S')$. On note $\bar{H}_\eta \rightarrow S$ la fermeture schématique de H_η dans G . Alors il existe un \bar{H}_η -torseur $\tilde{T} \rightarrow X$ contenu dans le G -torseur $Y \rightarrow X$ (par rapport au morphisme $\bar{H}_\eta \rightarrow G$), tel que $y \in \tilde{T}(S)$ et que le diagramme 5.1 soit cartésien.*

Démonstration. Le cas où $S = S'$ est assuré par la Proposition 5.3, point (1). Si $S' = \eta$ il suffit de remarquer que, sous les conditions de l'énoncé, $T_\eta \hookrightarrow Y_\eta \rightarrow Y$ n'est pas une immersion fermée : en effet $T_\eta \hookrightarrow Y_\eta \rightarrow Y$ est une immersion fermée si et seulement si $\tilde{T} = T$, où \tilde{T} est l'adhérence schématique de T dans Y ; mais pour tout point spécial $s \in S$, $y_s \in \tilde{T}$ alors que $y_s \notin T = T_\eta$, donc $T \neq \tilde{T}$. On fait intervenir maintenant la Proposition 5.3, point (2). Pour couvrir les autres cas on procède comme dans la preuve de la Proposition 5.3, cas 3 et 4. \square

6. LE SCHÉMA EN GROUPES FONDAMENTAL

L'objectif est de démontrer qu'une certaine catégorie de torseurs pointés sur un certain S -schéma de base $X \rightarrow S$ sous certains S -schémas en groupes est cofiltrée. On rappelle les conditions portant sur un S -schéma $X \rightarrow S$ qu'on sera amené à considérer :

- (A) $X \rightarrow S$ est localement de type fini et pour tout point $s \in S$, X_s est réduit ;
- (B) $X \rightarrow S$ est localement de type fini et pour tout point $x \in X \setminus X_\eta$, l'anneau local \mathcal{O}_x est intégralement clos ;
- (C) X est intègre et normal, $X \rightarrow S$ est localement de type fini et pour tout point $s \in S$, X_s est intègre et normal ;

Remarque 6.1. L'hypothèse (C) implique l'hypothèse (B).

Si $X \rightarrow S$ est un morphisme fidèlement plat et $x \in X(S)$ est un point fixé, alors on définit, dans l'esprit de [6], la catégorie $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{Qf}(X)$) des torseurs sous l'action d'un schéma en

groupes fini (resp. quasi-fini), pointés au dessus de x . Chaque objet est donc un triplet (Y, G, y) où G est un S -schéma en groupes fini (resp. quasi-fini) et plat, Y est un G -torseur pointé en $y \in Y_x(S)$. Un morphisme de triplets $\varphi : (Y, G, y) \rightarrow (Z, H, z)$ est la donnée d'un morphisme de schémas en groupes $G \rightarrow H$ et un morphisme de X -schémas pontés $Y \rightarrow Z$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G \times Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ H \times Z & \longrightarrow & Z. \end{array}$$

On montre le théorème suivant :

Théorème 6.2. *Soit X un schéma connexe et fidèlement plat sur S de fibre générique X_η . Soit $x \in X(S)$ un point.*

- (1) *si l'une des conditions (A) ou (B) est vérifiée, la catégorie $\mathcal{P}(X)$ est cofiltrée ; de plus dans $\mathcal{P}(X)$ les produits fibrés finis existent ;*
- (2) *si la condition (C) est vérifiée, la catégorie $\mathcal{Qf}(X)$ est cofiltrée ; de plus dans $\mathcal{Qf}(X)$ les produits fibrés finis existent ;*
- (3) *sous l'hypothèse (C), le foncteur naturel $\mathcal{P}(X) \hookrightarrow \mathcal{Qf}(X)$ est pleinement fidèle et commute aux produits fibrés finis.*

Démonstration. (1). On présente ici la preuve sous l'hypothèse (A) ; si on suppose vérifiée l'hypothèse (B) il suffit de réécrire la preuve à la lumière des résultats obtenus à la section 5.1. Puisque $\mathcal{P}(X)$ a un objet final (à savoir $(X, \{1\}_S, x)$) et les produits fibrés sur X existent dans $\mathcal{P}(X)$, il suffit de démontrer que pour trois objets quelconques $(Y_i, G_i, y_i), i = 0, 1, 2$ de $\mathcal{P}(X)$ et deux morphismes $\varphi_i : (Y_i, G_i, y_i) \rightarrow (Y_0, G_0, y_0), i = 1, 2$, il existe un quatrième objet (Y_3, G_3, y_3) et deux morphismes $\psi_i : (Y_3, G_3, y_3) \rightarrow (Y_i, G_i, y_i), i = 1, 2$ qui clôturent le carré. Soient X_η et $(Y_{i,\eta}, G_{i,\eta}, y_{i,\eta}), i = 0, 1, 2$ les fibres génériques de X et (Y_i, G_i, y_i) respectivement. D'après [13] $Y_{1,\eta} \times_{Y_{0,\eta}} Y_{2,\eta}$ est un $G_{1,\eta} \times_{G_{0,\eta}} G_{2,\eta}$ -torseur au dessus de X_η (pointé en $y_{1,\eta} \times_{y_{0,\eta}} y_{2,\eta}$). D'après la Proposition 4.2 on construit le G_3 -torseur $Y_3 \hookrightarrow Y_1 \times_X Y_2$ en prenant la clôture du $G_{1,\eta} \times_{G_{0,\eta}} G_{2,\eta}$ -torseur $Y_{1,\eta} \times_{Y_{0,\eta}} Y_{2,\eta}$ dans le $G_1 \times_S G_2$ -torseur $Y_1 \times_X Y_2$. Les restrictions ψ_i à Y_3 des projections $Y_1 \times_X Y_2 \rightarrow Y_i, i = 1, 2$, vérifient $\varphi_1 \circ \psi_1 = \varphi_2 \circ \psi_2$; on le vérifie sur les morphismes entre les groupes affines correspondants $G_3 \rightarrow G_0$, qui coïncident génériquement, et donc coïncident (sur un anneau intègre R , la platitude des schémas en groupes $G_i \rightarrow \text{Spec } R$ implique que $RG_i \subset KG_i$, où K est le corps des fractions de R ; deux morphismes $\theta, \theta' : G_3 \rightarrow G_0$ qui coïncident génériquement, induisent des morphismes égaux $\tilde{\theta}_\eta = \tilde{\theta}'_\eta : KG_0 \rightarrow KG_3$ dont les restrictions $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}' : RG_0 \rightarrow RG_3$ sont donc égales ; le cas général s'ensuit facilement). Finalement le point y_3 est, bien sûr, l'adhérence de $y_{1,\eta} \times_{y_{0,\eta}} y_{2,\eta}$ dans Y_3 . Il est clair que l'objet (Y_3, G_3, y_3) est le produit fibré dans la catégorie $\mathcal{P}(X)$ de (Y_1, G_1, y_1) et (Y_2, G_2, y_2) au dessus de (Y_0, G_0, y_0) . (2). La preuve du cas quasi-fini est semblable, en utilisant la Proposition 5.5. (3). Enfin la dernière assertion provient du caractère fonctoriel de la clôture schématique. \square

De la conclusion du Théorème 6.2 il résulte que les pro-objets des catégories $\mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{Qf}(X)$ sont représentables par des schémas ([10], Proposition 8.2.3). On notera $Pro - \mathcal{P}(X)$ et $Pro - \mathcal{Qf}(X)$ ces catégories de pro-objets. En suivant [7], [195], p. 109, on déduit du Théorème 6.2 l'existence de pro-objets universels : un triplet $(\hat{X}, \pi_1(X, x), \hat{x})$ (resp. $(\hat{X}^{\text{qf}}, \pi_1(X, x)^{\text{qf}}, \hat{x}^{\text{qf}})$) objet de $Pro - \mathcal{P}(X)$ (resp. objet de $Pro - \mathcal{Qf}(X)$) avec la propriété universelle suivante : pour tout triplet (P, G, x) objet de $Pro - \mathcal{P}(X)$ (resp. de $Pro - \mathcal{Qf}(X)$), il existe un unique morphisme $(\hat{X}, \pi_1(X, x), \hat{x}) \rightarrow (P, G, x)$ dans $Pro - \mathcal{P}(X)$ (resp. $(\hat{X}^{\text{qf}}, \pi_1(X, x)^{\text{qf}}, \hat{x}^{\text{qf}}) \rightarrow (P, G, x)$ dans $Pro - \mathcal{Qf}(X)$). Les objets de $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{Qf}(X)$) sont en correspondance bijective avec les S -morphisms $\pi_1(X, x) \rightarrow G$ (resp. $\pi_1(X, x)^{\text{qf}} \rightarrow G$) où $G \rightarrow S$ est un schéma en groupes fini (resp. quasi-fini) et plat.

Définition 6.3. Soient S un schéma de Dedekind de point générique η , X un schéma connexe et fidèlement plat sur S de fibre générique X_η . On suppose qu'une des deux conditions (A) ou (B) est vérifiée. Alors le triplet $(\widehat{X}, \pi_1(X, x), \widehat{x})$ est appelé *triplet universel* de $Pro - \mathcal{P}(X)$, le S -schéma en groupes $\pi_1(X, x)$ est appelé le *schéma en groupes fondamental* de X au point x et $\widehat{X} \rightarrow X$ est appelé le $\pi_1(X, x)$ -*torseur universel*.

Définition 6.4. Soit X un schéma connexe et fidèlement plat sur S et vérifiant la condition (C). Alors le triplet $(\widehat{X}^{qf}, \pi_1(X, x)^{qf}, \widehat{x}^{qf})$ est appelé *triplet universel* de $Pro - \mathcal{Q}f(X)$, le S -schéma en groupes $\pi_1(X, x)^{qf}$ est appelé le *schéma en groupes fondamental quasi-fini* de X au point x et $\widehat{X}^{qf} \rightarrow X$ est appelé le $\pi_1(X, x)^{qf}$ -*torseur universel*.

Remarque 6.5. Sous l'hypothèse (C), il résulte du Théorème 6.2, qu'il existe un unique morphisme canonique $(\widehat{X}^{qf}, \pi_1(X, x)^{qf}, \widehat{x}^{qf}) \rightarrow (\widehat{X}, \pi_1(X, x), \widehat{x})$, et que ce morphisme est génériquement fidèlement plat.

Proposition 6.6. Soit X un schéma connexe fidèlement plat sur S de fibre générique X_η . On suppose qu'une des deux conditions (A) ou (B) est vérifiée. On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Soient U un ouvert non vide de X , $S' := f(U)$ un ouvert de S ; on suppose que $x_{S'} \in U$ et que si $U \neq X_\eta$, pour tout point $x \in X \setminus U$, l'anneau local \mathcal{O}_x est intégralement clos. Alors $\pi_1(U, x_{S'}) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)_{S'}$ est schématiquement dominant (c.-à-d. le morphisme dual sur les algèbres est injectif). En particulier $\pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)_\eta$ est fidèlement plat.

Démonstration. Tenant compte des résultats des sections 4 et 5.1, on suit la simple preuve de [3]. \square

Proposition 6.7. Soient S un schéma de Dedekind, X et X' deux S -schémas connexes et fidèlement plats sur S , vérifiant une des conditions (A) ou (B). Soit $g : X' \rightarrow X$ un S -morphisme de schémas tel que $\mathcal{O}_X \rightarrow g_*(\mathcal{O}_{X'})$ est un isomorphisme. On suppose l'existence d'une section $x' \in X'(S)$ et on note $x := g(x')$, alors $\pi_1(X', x') \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)$ est schématiquement dominant.

Démonstration. C'est une conséquence du Lemme 5.1. \square

Corollaire 6.8. Soient X et X' deux S -schémas connexes et fidèlement plats sur S , vérifiant une des conditions (A) ou (B). Soit $g : X' \rightarrow X$ un S -morphisme propre, plat avec fibres géométriquement connexes et réduites. On suppose l'existence d'une section $x' \in X'(S)$ et on note $x := g(x')$, alors $\pi_1(X', x') \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)$ est schématiquement dominant.

Démonstration. C'est une conséquence de la Propositions 6.7. \square

Proposition 6.9. Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat vérifiant la condition (C). On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Soient U un ouvert de X , $S' := f(U)$ un ouvert de S et on suppose que $x_{S'} \in U$. Alors $\pi_1(U, x_{S'})^{qf} \twoheadrightarrow (\pi_1(X, x)^{qf})_{S'}$ est schématiquement dominant. En particulier si X_η désigne la fibre générique de X , alors $\pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow (\pi_1(X, x)^{qf})_\eta$ est fidèlement plat.

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 5.5. \square

Corollaire 6.10. Sous les hypothèses de la Proposition 6.9, le morphisme naturel $\psi : \pi_1(X, x)^{qf} \rightarrow \pi_1(X, x)$ est génériquement fidèlement plat.

Proposition 6.11. Soient $f : X \rightarrow S$, $f' : X' \rightarrow S$ deux morphismes lisses, surjectifs et localement de type fini, où X, X' sont connexes. Soit $g : X' \rightarrow X$ un S -morphisme de schémas tel que $\mathcal{O}_X \rightarrow g_*(\mathcal{O}_{X'})$ est un isomorphisme. On suppose l'existence d'une section $x' \in X'(S)$ et on note $x := g(x')$. Alors $\pi_1(X', x')^{qf} \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)^{qf}$ est schématiquement dominant.

Démonstration. C'est une conséquence du Lemme 5.1. \square

Corollaire 6.12. Soient S un schéma de Dedekind, $f : X \rightarrow S$, $f' : X' \rightarrow S$ deux morphismes lisses, surjectifs et localement de type fini, où X, X' sont connexes. Soit $g : X' \rightarrow X$ un S -morphisme propre, plat avec fibre géométriquement connexes et réduites. On suppose l'existence d'une section $x' \in X'(S)$ et on note $x := g(x')$, alors $\pi_1(X', x')^{\text{gf}} \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)^{\text{gf}}$ est schématiquement dominant.

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 6.11. □

7. TORSEURS GALOISIENS

Une autre conséquence intéressante de la Proposition 5.5 est le fait que tout torseur quasi-fini au dessus de X est précédé par un torseur galoisien (voir la Définition 7.1), où on dira qu'un élément (T, M, t) de $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$ est précédé par un deuxième élément (T', M', t') s'il existe un morphisme $(T', M', t') \rightarrow (T, M, t)$. Le nom *galoisien* pour ces objets a été choisi parce qu'ils généralisent la notion de revêtement galoisien étale.

Définition 7.1. Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat vérifiant la condition (C). On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Soit (T, M, t) un élément de $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$. On dira que (T, M, t) est *génériquement fini* si la fibre générique M_η du schéma en groupes M est finie¹. On dira que (T, M, t) est un *torseur galoisien* si, pour tout morphisme $(Z, Q, z) \rightarrow (T, M, t)$ dans $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$, où (Z, Q, z) est génériquement fini, le morphisme correspondant $Z \rightarrow T$ (ou, ce qui revient au même, $Q \rightarrow M$) est fidèlement plat.

Il est utile d'observer que si S est le spectre d'un corps cette notion coïncide avec celle de torseur réduit introduite par Nori dans [13].

Remarque 7.2. Soit $(T, M, t) = \varprojlim_{i \in I} (T_i, M_i, t_i)$, comme dans la Définition 7.1, un triplet génériquement fini. Alors on peut bien sûr supposer que pour tout i , le morphisme $M \rightarrow M_i$ induit un isomorphisme entre les fibres génériques $M_\eta \simeq M_{i,\eta}$. En effet, on peut supposer que les morphismes d'algèbres associées aux morphismes $M \rightarrow M_i$ sont injectifs, si bien que les morphismes $KM_i \rightarrow KM$ sont aussi injectifs. On utilise le fait que KM est un espace vectoriel de dimension finie, pour se restreindre aux indices i pour lesquels $KM_i \rightarrow KM$ est aussi surjectif, et donc un isomorphisme.

Définition 7.3. Soit (U, N, u) un torseur fini pointé au dessus de X_η . On définit la catégorie \mathcal{U} des modèles de (U, N, u) dont les objets sont les éléments (T, M, t) de $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$ munis d'un isomorphisme $(T_\eta, M_\eta, t_\eta) \simeq (U, N, u)$, les morphismes entre modèles étant les morphismes dans $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$ compatibles avec les isomorphismes donnés sur la fibre générique.

Lemme 7.4. Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat vérifiant la condition (C). On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Soit X_η la fibre générique de X et (U, N, u) un triplet au dessus de X_η . Alors la catégorie \mathcal{U} des éléments de $\mathcal{Q}f(X)$, modèles de (U, N, u) est vide ou cofiltrée. Soit maintenant (T, M, t) un élément de $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$, modèle de (U, N, u) , alors la catégorie \mathcal{U}' des éléments de $\mathcal{Q}f(X)$, modèles de (U, N, u) et précédés par (T, M, t) est cofiltrée et a pour limite (T, M, t) .

Démonstration. Pour la première affirmation, on suppose que \mathcal{U} n'est pas vide. On vérifie les deux axiomes nécessaires à ce que \mathcal{U} soit cofiltrée : soient (T_1, M_1, t_1) et (T_2, M_2, t_2) deux éléments de \mathcal{U} : d'après la Proposition 5.5, on construit le triplet $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{t})$ qui vit dans \mathcal{U} , obtenu comme adhérence schématique de (U, N, u) dans $(T_1 \times_X T_2, M_1 \times_S M_2, t_1 \times_S t_2)$ par la diagonale $(U, N, u) \hookrightarrow (U \times_{X_\eta} U, N \times_{\eta} N, u \times_{\eta} u)$, avec deux morphismes $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{t}) \rightarrow (T_1, M_1, t_1)$ et $(\bar{T}, \bar{M}, \bar{t}) \rightarrow (T_2, M_2, t_2)$. Pour le deuxième axiome, il suffit de constater que, si on se donne deux morphismes dans \mathcal{U} , $\varphi_j : (T', M', t') \rightarrow (T'', M'', t'')$, $j = 1, 2$, leurs restrictions à la fibre générique sont égales, ce qui assure que $\varphi_1 = \varphi_2$.

¹. M , qui à priori est un pro-schéma en groupes est en fait en schéma en groupes puisque les morphismes de transition sont affines.

La preuve de la seconde assertion est similaire. Pour montrer que la catégorie \mathcal{U}' n'est pas vide, on fait appel à la Remarque 7.2. \square

Lemme 7.5. *Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat vérifiant la condition (C). On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Soit (T, M, t) un élément génériquement fini de $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$. Soit (Y, H, y) un élément de $\text{Pro} - \mathcal{P}(X_\eta)$ (où X_η est la fibre générique de X) avec un morphisme $(Y, H, y) \rightarrow (T_\eta, M_\eta, t_\eta)$ tel que le morphisme correspondant $Y \rightarrow T_\eta$ soit une immersion fermée. Alors il existe un triplet $(\bar{Y}, \bar{H}, \bar{y})$ dans $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$ avec un morphisme $(\bar{Y}, \bar{H}, \bar{y}) \rightarrow (T, M, t)$ où \bar{H} est l'adhérence schématique de H dans M et \bar{Y} l'adhérence schématique de Y dans T .*

Démonstration. On peut bien sûr supposer que $(T, M, t) = \varprojlim_{i \in I} (T_i, M_i, t_i)$ où chaque morphisme $M_\eta \rightarrow M_{i,\eta}$ est un isomorphisme. Pour tout $i \in I$ on sait construire un \bar{H}_i -torseur $\bar{Y}_i \rightarrow X$, adhérence schématique de $Y \rightarrow X_\eta$ dans $T_i \rightarrow X$, où H_i est l'adhérence schématique de H dans M_i . Le \bar{H} -torseur $\bar{Y} \rightarrow X$ souhaité est la limite projective des $\bar{Y}_i \rightarrow X$. \square

Proposition 7.6. *Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat vérifiant la condition (C). On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Soit (T, M, t) un élément génériquement fini de $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) (T, M, t) est un tosseur galoisien ;
- b) le morphisme correspondant $\pi_1(X, x)^{qf} \rightarrow M$ est fidèlement plat ;
- c) (T_η, M_η, t_η) est galoisien et (T, M, t) est la limite de tous les modèles de (T_η, M_η, t_η) , fibre générique de (T, M, t) .

Démonstration. Le fait que a) entraîne b) est clair. Montrons l'implication c) \Rightarrow a). Soit (T', M', t') un élément de $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$ génériquement fini avec un morphisme $(g, \varphi) : (T', M', t') \rightarrow (T, M, t)$: il est, par hypothèse, génériquement fidèlement plat ; soient donc $(T, M, t) = \varprojlim_{i \in I} (T_i, M_i, t_i)$ où l'on peut supposer, d'après la Remarque 7.2, que chaque $M_\eta \rightarrow M_{i,\eta}$ est un isomorphisme et, de la même façon $(T', M', t') = \varprojlim_{j \in J} (T'_j, M'_j, t'_j)$ où l'on suppose que chaque $M'_\eta \rightarrow M'_{i,\eta}$ est un isomorphisme, et d'après le Lemme 7.4, J est l'ensemble des modèles de $(T'_\eta, M'_\eta, t'_\eta)$ précédés par (T', M', t') . On est dans la situation où $i \in I$ parcourt l'ensemble de tous les modèles de (T_η, M_η, t_η) . Soit $(i, j) \in I \times J$. Du fait que M_i est de type fini, le morphisme $\varphi_i : M' \rightarrow M \rightarrow M_i$ obtenu en composant φ au morphisme naturel $M \rightarrow M_i$ se factorise $M' \rightarrow M'_k \rightarrow M_i$, pour un certain $k \in J$. D'où un diagramme

$$\begin{array}{ccc} (T', M', t') & \xrightarrow{(g, \varphi)} & (T, M, t) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ (T'_j, M'_j, t'_j) & & (T'_k, M'_k, t'_k) \longrightarrow (T_i, M_i, t_i) \end{array}$$

Le Lemme 7.4 permet de factoriser les deux flèches verticales de gauche à travers $(T'_{j_1}, M'_{j_1}, t'_{j_1})$ pour un certain indice $j_1 \in J$, ce qui donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (T', M', t') & \xrightarrow{(g, \varphi)} & (T, M, t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T'_{j_1}, M'_{j_1}, t'_{j_1}) & \longrightarrow & (T_i, M_i, t_i) \\ \downarrow & & \\ (T'_j, M'_j, t'_j) & & \end{array}$$

Utilisant le Lemme 7.8 ci-dessous, et le fait que I décrit tous les modèles de la fibre générique de (T, M, t) , on trouve un indice $i_1 \in I$, avec des flèches rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (T', M', t') & \xrightarrow{(g, \varphi)} & (T, M, t) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (T'_{j_1}, M'_{j_1}, t'_{j_1}) & \xrightarrow{(g_1, \varphi_1)} & (T_{i_1}, M_{i_1}, t_{i_1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (T'_j, M'_j, t'_j) & & (T_i, M_i, t_i)
 \end{array}$$

où (g_1, φ_1) est fidèlement plat. Il s'ensuit que $(g, \varphi) = \varprojlim (g_1, \varphi_1)$ est fidèlement plat.

Montrons l'implication b) \Rightarrow c). Supposons que le morphisme $\varphi : \pi_1^{qf}(X, x) \rightarrow M$ correspondant au toreur (T, M, t) soit fidèlement plat. Utilisant l'énoncé 6.9, on en déduit que le morphisme $\pi_1(X_\eta, x_\eta) \rightarrow M_\eta$ correspondant à la fibre générique (T_η, M_η, t_η) est lui-même fidèlement plat, et donc que le toreur (T_η, M_η, t_η) est galoisien. Considérons alors la limite projective (T', M', t') de tous les modèles de (T_η, M_η, t_η) , qui existe d'après le Lemme 7.4. La propriété (c) est vérifiée pour l'objet (T', M', t') , ce qui assure que le morphisme correspondant $\varphi' : \pi_1^{qf}(X, x) \rightarrow M'$ est fidèlement plat. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1^{qf}(X, x) & \xrightarrow{\varphi'} & M' \\
 & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\
 & & M
 \end{array}$$

où ψ correspond au morphisme $(T', M', t') \rightarrow (T, M, t)$. Les morphismes φ et φ' étant fidèlement plats, ψ est fidèlement plat; et par ailleurs, sur la fibre générique, ψ_η est un isomorphisme. Utilisant le Lemme 7.7 ci-dessous, on en déduit que ψ est un isomorphisme, ce qui assure que le morphisme correspondant de toreurs $(T', M', t') \rightarrow (T, M, t)$ est lui-même un isomorphisme, et la condition (c) est vérifiée par (T, M, t) . \square

Le lemme suivant s'avère être nécessaire lorsque M et M' ne sont pas de type fini et on ne peut donc pas utiliser le critère de platitude par fibres :

Lemme 7.7. *Soit $\psi : M' \rightarrow M$ un morphisme affine de S -schémas plats, où S est un schéma de Dedekind. Si ψ est fidèlement plat et génériquement un isomorphisme, ψ est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme ψ est affine, il est en particulier séparé, et la diagonale $\Delta_\psi : M' \rightarrow M' \times_M M'$ est une immersion fermée entre S -schémas plats. L'unicité de l'adhérence schématique et le fait que la fibre générique de Δ_ψ est un isomorphisme, impliquent que Δ_ψ est un isomorphisme, et donc que ψ est un monomorphisme. Or un monomorphisme quasi-compact et fidèlement plat est un isomorphisme ([4], Corollaire 2.9, p. 46, section 2). \square

Lemme 7.8. *Soit $g : M' \rightarrow M$ un morphisme schématiquement dominant entre schémas en groupes quasi-finis sur S . Il existe alors une factorisation unique $g = h \circ f$, où f est fidèlement plat et h_η est un isomorphisme.*

Démonstration. On introduit $N = \overline{(Ker g)_\eta}$ l'adhérence schématique dans M' de la fibre générique du noyau de g , qui vérifie $N \subset Ker(g)$. La factorisation annoncée est $M' \rightarrow M'/N \rightarrow M$. \square

Corollaire 7.9. *Soit $f : X \rightarrow S$ fidèlement plat vérifiant la condition (C). On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Pour tout objet (Y, G, y) dans $Pro - \mathcal{Q}f(X)$, génériquement fini il existe un unique toreur galoisien (T, M, t) et un morphisme $(T, M, t) \rightarrow (Y, G, y)$ tel que le morphisme $T \rightarrow Y$ correspondant est génériquement une immersion fermée.*

Démonstration. On considère la fibre générique (Y_η, G_η, y_η) de (Y, G, y) . Soit (Z, H, z) l'unique triplet galoisien au dessus de X_η contenu dans (Y_η, G_η, y_η) . La limite (T, M, t) de tous les modèles de (Z, H, z) existe (cf. Lemme 7.4) et il s'agit bien d'un torseur galoisien d'après la Proposition 7.6. Soit (T', M', t') un autre torseur galoisien et soit $(T', M', t') \rightarrow (Y, G, y)$ un X -morphisme de torseurs, qui est génériquement une immersion fermée. D'après la Proposition 7.6, $(T'_\eta, M'_\eta, t'_\eta)$ est un triplet galoisien au dessus de X_η . Il s'ensuit que $(T'_\eta, M'_\eta, t'_\eta)$, (T_η, M_η, t_η) et (Z, H, z) coïncident. Soit (Q, L, q) le torseur obtenu en prenant l'adhérence schématique de (Z, H, z) dans le $M \times M'$ -torseur produit $T \times_X T'$ (à travers la diagonale $Z \hookrightarrow Z \times_X Z$); d'après le Lemme 7.5, (Q, L, q) est génériquement isomorphe au H -torseur Z ; mais du fait que T et T' sont galoisiens, on en déduit que les morphismes $Q \rightarrow T$ et $Q \rightarrow T'$ sont fidèlement plats, et donc des isomorphismes, puisque génériquement ce sont des isomorphismes. \square

On observe qu'en général, le M -torseur du corollaire n'est pas fini même si le G torseur donné est fini. Le prochain exemple illustre ce phénomène :

Exemple 7.10. Soient $S = \text{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète de caractéristique positive p , d'uniformisante π et $X = \mathbb{A}_R^1$ la droite affine sur R . On considère le $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_R$ -torseur $Y := \text{Spec}(R[x, y]/(y^p - y - \pi x))$ au dessus de X et le G -torseur au dessus de X (où G est le R -schéma en groupes qui a été défini dans la Remarque 5.4) $Y' := \text{Spec}(R[x, y]/(\pi^{p-1}y^p - y - x))$. Il y a un unique morphisme de torseurs $Y' \rightarrow Y, y \mapsto \pi y$ qui est génériquement un isomorphisme, ce qui montre tout de suite que Y n'est pas un torseur galoisien. Pour observer, au contraire, que Y' est un torseur galoisien on peut utiliser le critère donné par le Lemme 7.11. On remarque aussi que Y est fini, alors que Y' est quasi-fini, mais non fini.

Lemme 7.11. *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme fidèlement plat vérifiant la condition (C). On suppose l'existence d'une section $x \in X(S)$. Soit (Y, G, y) un élément de $\mathcal{Q}f(X)$. Si, pour tout point $s \in S$, la restriction (Y_s, G_s, y_s) est un torseur galoisien, (Y, G, y) est un torseur galoisien.*

Démonstration. Soit $(Z, Q, z) = \varprojlim_{j \in J} (Z_j, Q_j, z_j)$ un objet de $\text{Pro} - \mathcal{Q}f(X)$ génériquement fini et $u : (Z, Q, z) \rightarrow (Y, G, y)$ un morphisme. Pour tout $j \in J$, considérons le produit fibré (T_j, M_j, t_j) dans $\mathcal{Q}f(X)$ des objets (Z_j, Q_j, z_j) et (Y, G, y) ; il s'ensuit que $(Z, Q, z) = \varprojlim_{j \in J} (T_j, M_j, t_j)$, où (T_j, M_j, t_j) décrit les objets de $\mathcal{Q}f(X)$ au travers desquels $u : (Z, Q, z) \rightarrow (Y, G, y)$ se factorise. Il suffit donc de montrer que u est fidèlement plat, dans le cas où (Z, Q, z) est un objet de $\mathcal{Q}f(X)$. Du fait que pour tout point $s \in S$, le G_s -torseur $Y_s \rightarrow X_s$ est galoisien, on déduit que $u_s : Z_s \rightarrow Y_s$ est fidèlement plat. Le critère de platitude par fibres nous permet de conclure que u est aussi fidèlement plat. \square

RÉFÉRENCES

- [1] AA. VV., *Stacks Project*, version 94a58fd
- [2] S. ANANTHARAMAN, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*. Sur les groupes algébriques, pp. 5-79. Bull. Soc. Math. France, Mem. 33, Soc. Math. France, Paris, 1973
- [3] M. ANTEI, *Comparison between the fundamental group scheme of a relative scheme and that of its generic fibre*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux, Tome 22, no 3 (2010), p. 537-555.
- [4] M. DEMAZURE, P. GABRIEL *Groupes algébriques*. Tome I : Géométrie algébrique. Généralités. Groupes commutatifs. Paris : Masson et Cie, Éditeur ; Amsterdam : North-Holland Publishing Company.
- [5] M. DEMAZURE, A. GROTHENDIECK *Schémas en groupes. I : Propriétés générales des schémas en groupes*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151 Springer-Verlag, Berlin-New York 1970
- [6] C. GASBARRI, *Heights of vector bundles and the fundamental group scheme of a curve*, Duke Math. J. 117, No.2, 287-311 (2003).
- [7] A. GROTHENDIECK, *Fondements de la géométrie algébrique (extraits du Séminaire Bourbaki 1957-62)*, Secrétariat mathématique, Paris, 1962.

- [8] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 4, (1960).
- [9] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*. 2, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 24, (1965).
- [10] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*. 3, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 28 (1966).
- [11] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, GTM, Springer Verlag (1977).
- [12] Q. LIU, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Science Publications (2002).
- [13] M. V. NORI, *The fundamental group-scheme*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol. 91, Number 2, (1982), p. 73-122.
- [14] M. RAYNAUD, *Anneaux locaux henséliens*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [15] M. RAYNAUD, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, Proceedings of a Conference on Local Fields, Springer-Verlag (1967), p. 78-85.
- [16] W.C. WATERHOUSE, B. WEISFEILER, *One-dimensional affine group schemes*, Journal of Algebra, 66, 550-568 (1980).

MARCO ANTEI, LABORATOIRE J.A.DIEUDONNÉ UMR CNRS-UNS N°7351 UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS PARC VALROSE 06108 NICE CEDEX 2

MICHEL EMSALEM, LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ, U.F.R. DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DE LILLE 1, 59 655 VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE

CARLO GASBARRI, IRMA, UMR 7501 7 RUE RENÉ-DESCARTES 67084 STRASBOURG CEDEX